

Exemple de correspondance entre représentations : espace des états et sphère de Bloch

Frédéric Fabre

2025 - url : <https://www.dblogos.net/er/txt10.pdf>

Résumé :

L'expérience de Stern et Gerlach a donné lieu à une mise en correspondance entre l'espace des états à deux dimensions (qubits) et la sphère unité, que l'on appelle alors sphère de Bloch. Chacune de ces entités constitue une représentation que l'on doit interpréter comme relevant soit du mode formel, soit du mode symbolique, pour reprendre la distinction effectuée par Pierre Cartier. L'objet de cet article est d'étudier ces différents aspects, et de montrer que les relations entre représentations peuvent faire l'objet des mêmes qualifications.

Mots-clés : mécanique quantique, espace des états, qubit, expérience de Stern et Gerlach, sphère de Bloch, projection stéréographique, représentations

Title : Example of correspondence between representations : quantum state and Bloch Sphere

Abstract :

Stern and Gerlach experiment led to a mapping between the space of two-dimensional states (qubits) and the unit sphere, known as the Bloch sphere. Each of these entities constitutes a representation that must be interpreted as either formal or symbolic, to use Pierre Cartier's distinction. The aim of this article is to study these different aspects, and to show that relations between representations can be qualified in the same way.

Keywords : quantum mechanics, quantum state, qubit, Stern-Gerlach experiment, Bloch sphere, stereographic projection, representations

1. Représentation dans l'espace des états

Soit une particule de masse m et de charge q qui tourne autour d'un axe selon un rayon r . Le moment cinétique orbital et le moment magnétique de cette particule sont respectivement $\vec{L} = m\vec{r}\vec{v}$ et $\vec{\mu} = \frac{1}{2}q\vec{r}\vec{v}$, et le rapport gyromagnétique est $\gamma = \frac{\mu}{L} = \frac{q}{2m}$. Dans l'expérience de Stern et Gerlach, on mesure le moment cinétique orbital d'atomes neutres (des atomes d'argent), tenant compte du rapport gyromagnétique. On fait sortir ces atomes d'un appareillage à température élevée¹, et à la sortie on crée un champ magnétique inhomogène $\vec{B}$. Les atomes d'argent étant neutres il n'y a pas de force de Laplace $q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Il reste un moment magnétique intrinsèque $\vec{\mu}$, donc la force exercée sur chaque atome est seulement $\vec{\nabla}\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Suivant l'angle θ entre le moment magnétique $\vec{\mu}$ et le champ magnétique $\vec{B}$, on a les directions : $\theta = 0$: tout droit ; $\theta < 0$: vers le bas ; $\theta > 0$: vers le haut. La force et donc la déviation sont maximales vers le haut ou vers le bas quand $\vec{\mu}$ et $\vec{B}$ sont alignés. Si μ_m est la déviation maximale, on a $\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu_m B \cos \theta$, et la composante de μ_m suivant le champ magnétique $\vec{B}$ est $\mu_m \cos \theta$. Le carré de l'angle solide est $2\pi d(\cos \theta)$, donc si la direction de chaque atome est aléatoire, le cosinus l'est aussi, ce qui pour un grand nombre d'atomes devrait se traduire par une répartition homogène. Le résultat de l'expérience est qu'on n'observe jamais de répartition homogène, mais toujours une des déviations maximales vers le haut ou vers le bas, de façon équiprobable.

Michel Bitbol décrit cette situation expérimentale comme représentative de ce qui permet d'engendrer des « paradoxes quantiques », où dans un premier temps on fait référence à des « corps matériels réidentifiables et porteurs de propriétés » (les atomes d'argent) avant de mettre en évidence les contradictions entre leur comportement initialement prévu et la réalité.² Ainsi que l'ont souligné Jean-Louis Basdevant et Jean Dalibard, il est remarquable que l'on puisse expliquer les résultats expérimentaux juste en développant les conséquences de l'hypothèse « minimale » selon laquelle l'espace des états du moment magnétique est un espace de Hilbert de dimension 2^3 :

$$|\Psi\rangle = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Les carrés des coefficients α et β sont des nombres réels qui donnent chacun la probabilité de l'état correspondant. On définit l'opérateur $\hat{\mu}_z$ dont les kets $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ sont vecteurs propres avec les valeurs propres respectivement $+\mu_m$ et $-\mu_m$:

$$\hat{\mu}_z|+\rangle_z = \mu_m|+\rangle_z; \hat{\mu}_z|-\rangle_z = -\mu_m|-\rangle_z \quad (2)$$

$|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ sont des vecteurs orthonormés constituant une base de l'espace des états.

Si on est maintenant dans l'état $|+\rangle_x$ et que l'on mesure la composante suivant z , on trouve également $+\mu_m$ ou $-\mu_m$ de façon équiprobable, donc on peut écrire :

¹ Pour un schéma du principe de ce dispositif, et pour une description plus détaillée des conditions de l'expérience, v. Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, *Mécanique quantique I*, Paris, Hermann, 1977, p. 386-389.

² Cf. Michel Bitbol, *Mécanique quantique, Une introduction philosophique*, Paris, Flammarion, 1996, p.188.

³ Cf. Jean-Louis Basdevant et Jean Dalibard, *Mécanique quantique*, Paris, Éditions de l'École Polytechnique, 2006, p. 178.

$$|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z$$

La probabilité d'obtenir un résultat donné ne change pas quand on multiplie le vecteur d'état par une phase $e^{i\omega}$. On affecte une phase au vecteur d'état de façon que le premier coefficient soit un réel, et si, par un changement de notation, on renomme α la grandeur $\alpha e^{i\omega}$, et $|-\rangle_z$ le ket $e^{i\omega}|-\rangle_z$, on a toujours une expression de la forme :

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z \quad (3)$$

Soit un vecteur d'état $|-\rangle_x^\bullet := \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z^\bullet + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z^\bullet$, et $\gamma \neq \omega : e^{i\gamma}|-\rangle_x^\bullet = \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{2}}|+\rangle_z^\bullet + \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{2}}|-\rangle_z^\bullet$

Cherchons les conditions pour lesquelles : $e^{i\gamma}|-\rangle_x^\bullet = |-\rangle_x^\bullet ; e^{i\gamma}|+\rangle_z^\bullet = |+\rangle_z^\bullet ; |-\rangle_z^\bullet = |-\rangle_z^\bullet$

$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{2}}|-\rangle_z \quad (4)$$

D'après (3) et (4) : ${}_x\langle + | - \rangle_x = \frac{1}{2}(1 + e^{i\gamma}) = 0 \Rightarrow e^{i\gamma} = -1 \Rightarrow \gamma = \pi \quad (5)$

En reportant dans (4) : $|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z \quad (6)$

On développe maintenant $|+\rangle_y$ sur la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$:

$$|+\rangle_y = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z, \alpha, \beta \in \mathbf{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Ensuite, comme précédemment pour $|+\rangle_x$, on effectue le changement de notation adéquat permettant de garder la même forme avec $\alpha \in \mathbf{R}^+$, et on fait le produit hermitien de $|+\rangle_z$ avec $|+\rangle_y$, ce qui donne : ${}_z\langle + | + \rangle_y = \alpha$. La probabilité d'obtenir $|+\rangle_x$ comme résultat de mesure étant $\frac{1}{2}$, on a $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (puisque α est réel), et $|\beta|^2 = \frac{1}{2}$. De façon analogue à (4) pour $|+\rangle_x$, on peut écrire $|+\rangle_y$ sous la forme :

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{e^{i\lambda}}{\sqrt{2}}|-\rangle_z \quad (7)$$

Si on est dans l'état $|+\rangle_y$ et que l'on veut mesurer la composante du moment magnétique dans la direction x , on a une chance sur deux de trouver $|+\rangle_x$ ou $|-\rangle_x$:

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_x \quad (8)$$

La composante de $|+\rangle_y$ suivant $|+\rangle_x$ est donnée par le produit hermitien : ${}_x\langle+|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc le carré de cette composante donne la probabilité d'obtenir le résultat $|+\rangle_x$ si on est dans l'état $|+\rangle_y$. D'après (4) et (7), dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$:

$$|+\rangle_x = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow {}_x\langle+| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) ; |+\rangle_y = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ e^{i\lambda}/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ donc : } {}_x\langle+|+\rangle_y = \frac{1}{2} + \frac{e^{i\lambda}}{2}$$

Les produits scalaires de vecteurs dans des bases orthonormées différentes sont égaux, donc ${}_x\langle+|+\rangle_y$ calculé dans la base $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ est égal à ${}_x\langle+|+\rangle_y$ calculé dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$.

$$|{}_x\langle+|+\rangle_y|^2 = \left| \frac{1}{2} + \frac{e^{i\lambda}}{2} \right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + \cos \lambda) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\pi}{2} \text{ et } e^{i\lambda} = \pm i$$

$|+\rangle_y$ est orthogonal à $|+\rangle_x$ et $|+\rangle_z$, correspondant à $+i$ pour un repère direct, et $-i$ pour un repère indirect. Donc d'après (7), dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ et dans un repère direct :

$$|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (9)$$

Le produit hermitien de $|-\rangle_y$ par $|+\rangle_y$ doit être nul, ce qui est vérifié pour :

$$|-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z - \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\text{puisque dans ce cas : } {}_y\langle-|+\rangle_y = \frac{1}{2} ({}_z\langle+|+i{}_z\langle-|)(|+\rangle_z + i|-\rangle_z) = 0$$

2. Mise en correspondance avec la sphère de Bloch

On considère comme précédemment deux états possibles à valeur bien définie $|+\rangle$ et $|-\rangle$, tous les états possibles du système étant de la forme :

$$|\Psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle, \text{ avec } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \alpha \in \mathbf{R}^+ \text{ et } \beta \in \mathbf{C}$$

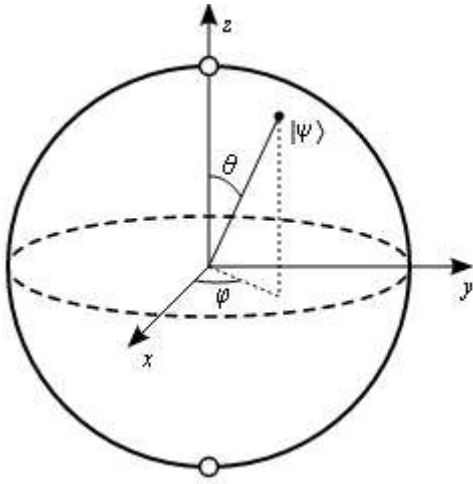
Dans ces conditions, on peut définir α et $|\beta|$ respectivement comme cosinus et sinus d'un angle λ :

$$\exists \lambda \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \alpha = \cos \lambda ; |\beta| = \sin \lambda$$

Soit un angle $\varphi \in [0, 2\pi]$: $[(\sin \lambda)e^{i\varphi}]^2 = \sin^2 \lambda = |\beta|^2$. On peut écrire $|\Psi\rangle$ sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \cos \lambda |+\rangle + (\sin \lambda)e^{i\varphi} |-\rangle$$

On pose : $\theta = 2\lambda$, donc : $\exists \theta \in [\pi] : |\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi} |-\rangle$ (11)



On représente la position d'un point (x, y, z) sur la surface d'une sphère unité par deux angles du vecteur dont l'origine est le centre de la sphère et l'extrémité le point considéré : l'*angle zénithal* θ , c'est-à-dire l'angle que fait ce vecteur avec la direction $\vec{u}_z$, et l'*angle azimutal* φ de la projection de ce même vecteur sur le plan xOy .

$$x = \sin \theta \cos \varphi ; y = \sin \theta \sin \varphi ; z = \cos \theta$$

où θ varie de 0 à π , et φ de 0 à 2π .

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6b/Bloch_sphere.svg

Dans les définitions précédentes relatives au vecteur d'état $|\Psi\rangle$, φ varie de 0 à 2π , et $\theta = 2\lambda$ de 0 à π , donc on peut établir une correspondance bi-univoque entre les couples de valeurs (θ, φ) respectivement dans l'espace des états, qui est un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et dans la sphère unité, appelée *sphère de Bloch*.

- Directions $\pm \vec{u}_z$

D'après (9), l'état $|+\rangle$ correspond à $\sin \frac{\theta}{2} = 0$ et $\cos \frac{\theta}{2} = 1$, donc à $\theta = 0$, c'est-à-dire au pôle nord ; et l'état $|-\rangle$ correspond à $\cos \frac{\theta}{2} = 0 \Rightarrow \theta = \pi$ et $\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi} = 1 \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = 1$ et $\varphi = 0$, c'est-à-dire au pôle sud.

On peut déjà voir qu'ici à deux états *orthogonaux* dans $\mathcal{H}$ correspondent des *directions opposées* dans la sphère de Bloch.

- Directions $\pm \vec{u}_x$

Le point où l'axe Ox intercepte la sphère correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = 0$. Soit $|u_x\rangle$ l'état qui correspond à $\vec{u}_x$. D'après (11) :

$$|u_x\rangle = \cos \frac{\pi}{4} |+\rangle + \sin \frac{\pi}{4} |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle$$
 (12)

La direction $-\vec{u}_x$ correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \pi$:

$$|-u_x\rangle = \cos\frac{\pi}{4}|+\rangle + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)e^{i\pi}|- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|- \rangle \quad (13)$$

Le produit hermitien de $|-u_x\rangle$ par $|u_x\rangle$ est : $\langle u_x|-u_x\rangle = \frac{1}{2}(\langle+|+\langle-|)(|+\rangle-|- \rangle) = 0$.

Donc $|u_x\rangle$ et $|-u_x\rangle$ sont orthogonaux. Là aussi à des directions orthogonales dans l'espace des états correspondent des directions opposées dans la sphère de Bloch.

- Directions $\pm \vec{u}_y$

La direction $\vec{u}_y$ correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$. D'après (11) : $|u_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}|- \rangle$,
avec $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, donc :

$$|u_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|- \rangle \quad (14)$$

La direction $-\vec{u}_y$ correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, avec $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$, donc :

$$|-u_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|- \rangle \quad (15)$$

Le produit hermitien de $|-u_y\rangle$ par $|u_y\rangle$ est : $\langle u_y|-u_y\rangle = \frac{1}{2}(\langle+|-i\langle-|)(|+\rangle-i|- \rangle) = 0$

On a donc toujours la même correspondance entre orthogonalité dans l'espace des états et opposition dans la sphère de Bloch.

- Direction quelconque

Pour une direction quelconque $\vec{u}$ dans la sphère de Bloch, d'après (11) :

$$|u\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|- \rangle \quad (16)$$

La direction opposée correspond pour θ à $\pi - \theta$, et pour φ à $\varphi + \pi$, donc :

$$|-u\rangle = \cos\frac{\pi-\theta}{2}|+\rangle + \left(\sin\frac{\pi-\theta}{2}\right)e^{i(\varphi+\pi)}|- \rangle = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}e^{i\pi}, \text{ donc :}$$

$$|-u\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|+\rangle - \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|- \rangle \quad (17)$$

Le produit hermitien de $|-u\rangle$ par $|u\rangle$ est :

$$\begin{aligned}\langle u|-u\rangle &= \left[\cos\frac{\pi}{2}\langle +|+\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)e^{-i\varphi}\langle -| \right] \left[\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle - \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|-\rangle \right] = \\ &= \cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\langle +|+\rangle - \left(\cos^2\frac{\pi}{2}\right)e^{i\varphi}\langle +|-\rangle + \sin^2\frac{\pi}{2}\langle -|+\rangle - \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}e^{-i\varphi}e^{i\varphi}\langle -|-\rangle = 0\end{aligned}$$

Donc, pour une direction quelconque, on a bien toujours deux directions opposées dans la sphère de Bloch pour deux vecteurs orthogonaux dans l'espace des états.

3. Mode formel et mode symbolique

3.1. Définitions

D'un point de vue méthodologique, l'association de structures mathématiques (en l'occurrence ici géométriques) à la structure de phénomènes physiques est constitutive des théories physiques.¹ Pour déterminer la nature de la correspondance entre espace des états et sphère de Bloch, puis entre cette correspondance même et les faits observables, on va voir qu'il faut tenir compte de la distinction que fait Pierre Cartier entre le *mode formel*, qui décrit de façon réaliste les représentations spatio-temporelles, et le *mode symbolique*, où la correspondance avec le réel est seulement symbolique et non réaliste² – thème que j'ai abordé dans *Emergence et représentation (ER)*, section 2.5.2.³ On peut se poser la question de la légitimité des représentations sur le mode symbolique. Le qualificatif de « symbolique » est interprété ici en un sens restrictif, conformément à ce qu'en dit Umberto Eco lorsqu'il évoque un « rapport (...) codé à partir de règles projectives », où l'on a pu établir une relation de correspondance bi-univoque entre la représentation symbolique et son objet.⁴ Ainsi que l'écrivait Max Planck, « là où il n'y a pas d'objet, il ne saurait être question d'en donner une représentation »⁵ ; donc réciproquement, on peut dire qu'une représentation, y compris sur le mode symbolique, se rapporte légitimement à son objet dès lors qu'elle détermine une relation de correspondance avec les faits.

Il faut aussi préciser si cette correspondance – qui doit toujours rester « bi-univoque » – est *immédiate*, dans le sens où elle ne nécessite qu'une simple *transcription*, ou *médiate*, dans le cas où la représentation utilisée nécessite une *retranscription* afin de pouvoir se rapporter aux faits observables (espace et temps séparément, probabilités, etc.). Cette distinction ne recouvre pas exactement celle entre modes formel et symbolique. Nous allons voir que pour les représentations sur le mode formel, la correspondance avec les faits observables peut suivant les cas être immédiate ou médiate, et dans ce dernier cas la question a pu se poser de savoir si la représentation considérée ne relèverait pas plutôt du mode symbolique ; et dans le cas du mode symbolique, la correspondance avec les faits est toujours médiate.

Selon l'interprétation que fait Popper de la définition tarskienne de la vérité comme « correspondance avec les faits » :

¹ Cf. Jean Largeault, *Énigmes et controverses*, Paris, Aubier Montaigne, 1980, p. 136.

² Cf. Pierre Cartier, *Les étapes de la géométrisation de la physique*, E.N.S., Séminaire de Philosophie et Mathématiques, séance du 23 mars 1998.

³ <https://www.dblogos.net/er/ER.pdf>.

⁴ Cf. Umberto Eco, *Sémiotique et philosophie du langage*, 1988, Paris, Presses Universitaires de France, 2011, p. 202.

⁵ Max Planck, *Initiations à la physique*, 1934, trad. J. du Plessis de Grenédan, Paris, Flammarion, 1993, p. 215.

(...) le langage dans lequel nous parlons quand nous expliquons la correspondance doit disposer des moyens nécessaires pour *se référer* à des énoncés et pour *décrire* des faits. Si j'ai un langage qui dispose de ces deux moyens, de sorte qu'il puisse *se référer* aux énoncés et pour *décrire* les faits, alors je peux, dans ce langage – le *métalangage* – parler de correspondance avec les faits sans aucune difficulté.¹ (souligné par l'auteur)

Donc, si le rapport entre l'appareil conceptuel du langage théorique utilisé et la description des faits observables nécessite une retranscription, celle-ci fait partie du métalangage.

3.2. Principe de Hankel et compatibilité sémantique

Du fait que l'espace des états décrit une réalité physique dont au bout du compte on peut observer les différents aspects, on serait tenté de le considérer comme relevant du mode formel, comme on l'a fait pour la relativité restreinte dans le cas de la représentation de Minkowski (v. *ER*, p. 36-46). La question de savoir dans quelle catégorie situer la notion d'espace-temps a fait l'objet d'avis divergents : par exemple de Broglie y voyait un espace abstrait, ce qui en faisait une représentation symbolique, tandis qu'Olivier Costa de Beauregard au contraire lui donnait une interprétation réaliste, ce qui en faisait une représentation formelle². Hermann Minkowski et Moritz Schlick allaient jusqu'à considérer qu'il fallait *substituer* l'espace-temps à l'espace et au temps³ ; mais alors il s'agissait d'étendre la notion d'espace physique tridimensionnel à la notion d'espace-temps quadridimensionnel, où la dimension supplémentaire *ict* est homogène et orthogonale aux trois autres, en substituant à l'invariant de la géométrie euclidienne tridimensionnelle $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ l'invariant des transformations de Lorentz⁴, soit : $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + \Delta u^2$, avec $u = ict$. Selon Olivier Costa de Beauregard :

(...) l'équivalence physique entre espaces et temps dans le rapport c s'affirme dans la physique théorique tout entière, et s'y exprime en termes de géométrie quadridimensionnelle.⁵

On est en fait ici dans un contexte où peut s'appliquer le *principe de Hankel*, défini comme un « principe de permanence des lois formelles ou des formes opératoires »⁶, appliqué initialement à l'extension de la notion d'espace dans le cas de plus de trois dimensions, ou au passage des nombres réels aux nombres complexes.⁷ Ces deux extensions sont précisément impliquées conjointement dans le passage de la relativité restreinte sous sa forme initiale à la représentation de Minkowski, mais elles sont de nature différente : dans le cas du passage des nombres réels aux nombres complexes, on a une relation de cas général (la nouvelle représentation) à cas limite (l'ancienne, donc si la partie imaginaire est nulle), et dans le cas de la représentation de Minkowski, on a un accroissement de signification sans accroissement du domaine empirique, donc sans relation de cas général à cas limite (v. *ER*, section 2.3, p. 23-29). On dépasse donc ici la simple absence de contradiction, que par exemple Emile

¹ Cf. Karl Popper, *La connaissance objective*, 1972, trad. Jean-Jacques Rosat, Paris, Aubier, 1991, p. 461.

² Cf. Georges Lochak, *La géométrisation de la physique*, Paris, Flammarion, 1994, p. 100-102.

³ Cf. Iraj Nikseresht, *La théorie de la relativité, Une approche historique et philosophique*, Paris, L'Harmattan, 2007, p. 88-89.

⁴ Cf. Boris Kouznetsov, *Essais sur la relativité*, trad. Anne Sokova, Moscou, Éditions Mir, 1971, p. 164-165.

⁵ Olivier Costa de Beauregard, *La grandeur physique « temps »*, in *Logique et connaissance scientifique*, ouvrage collectif sous la direction de Jean Piaget, Paris, Gallimard, Encyclopédie de la Pléiade, 1967, p. 739.

⁶ Cf. Emile Meyerson, *Du cheminement de la pensée*, tome II, Paris, Librairie Félix Alcan, 1931, p. 382 ; v. également Léon Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, 1912, Paris, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1993, p. 442-443.

⁷ Cf. Emile Meyerson, *op. cit.*, p. 371-384.

Borel considérait comme suffisante dans le cas du passage des nombres réels aux nombres complexes¹.

Pour ce qui est des nombres, Sophie Roux décrit le principe de Hankel comme « une nouvelle manifestation du schéma de l'identification : les anciens et les nouveaux nombres sont d'une certaine façon traités comme s'ils étaient identiques, alors qu'en fait ils ne le sont pas »². Mais cette interprétation est incomplète : l'application du principe de Hankel suppose que l'on a été en mesure de reconnaître dans ce qui a servi de point de départ un cas particulier (ou un ensemble de cas particuliers) par rapport à quelque chose de plus général. Selon Gilles Gaston Granger, la nouvelle théorie permet d'exhiber des objets « irréguliers » qui prolongent les propriétés d'objets « réguliers », et *après coup* ce sont les objets irréguliers qui deviennent la référence légitime, les objets initialement réguliers n'étant plus alors que des cas particuliers.³ En reprenant la problématique carnapienne du « système de constitution », on peut dire que cette reconnaissance passe par un dépassement de la « synthèse cognitive [qui] s'opère de manière intuitive » au profit d'une « reconstruction rationnelle ».⁴ Ainsi que l'écrit Robert Blanché :

La généralisation mathématique procède (...) du simple au complexe, en s'élevant à une notion plus riche qui permet de construire, à sa place parmi un système, la notion initiale comme un cas spécial privilégié, où l'annulation de certaines variables masque la complexité.⁵

Mais cela suppose que l'on a reconnu une *compatibilité sémantique* des concepts utilisés lors du passage de la formulation initiale à la nouvelle. Dans le cas de l'émergence de la notion d'espace-temps en relativité, même si, dans une perspective kantienne et relativement au sujet connaissant, seul l'espace isolément « est une représentation nécessaire *a priori* qui sert de fondement à toutes les intuitions extérieures »⁶, et seul le temps isolément « est la condition formelle *a priori* de tous les phénomènes en général »⁷, cette compatibilité sémantique est préservée, si bien que l'espace-temps de la relativité restreinte constitue bien une représentation sur le mode formel.

Pour la relativité générale, Pierre Cartier parle de *mode substantiel*, où l'espace est lui-même substance puisqu'il est *objet* de courbure. Dans le cas de cette théorie, si l'on part des connaissances antérieures, le principe de Hankel s'applique, donc relativement à cet aspect les mêmes considérations que celles relatives au mode formel restent valables.

¹ Emile Borel, *L'imaginaire et le réel en mathématiques et en physique*, Paris, Éditions Albin Michel, 1952, p. 15.

² Sophie Roux, *Meyerson et les mathématiques*, in *Corpus* n° 58, Association pour la revue Corpus, Paris, 2010, p. 43.

³ Cf. Gilles Gaston Granger, *Langages et épistémologie*, Paris, Klincksieck, 1979, p. 57.

⁴ Cf. Rudolf Carnap, *La construction logique du monde*, 1928, trad. Thierry Rivain et Élisabeth Schwartz, Paris, Vrin, 2002, p. 188.

⁵ Robert Blanché, *La science physique et la réalité*, Paris, Presses Universitaires de France, 1948, p. 24.

⁶ Cf. Emmanuel Kant, *Critique de la raison pure*, 1781, trad. A. Tremesaygues et B. Pacaud, Paris, Presses Universitaires de France, 1975, p. 56.

⁷ *Ibid.*, p. 57.

3.3. Incompatibilité sémantique

Soient $|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i |v_i\rangle$ l'état normé d'un système, $\{g_i\}$ les valeurs possibles pour la grandeur physique que l'on veut mesurer, et $\{P(g_i)\}$ leurs probabilités. La règle de Born, soit

$$P(g_i) = \frac{|\alpha_i|^2}{\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^n P(g_i) = 1$$

permet d'associer l'*orthogonalité* des composantes d'un vecteur d'état normé à la mesure de valeurs différentes d'une grandeur physique, si la probabilité d'obtenir chacune de ces valeurs est le carré du coefficient de la composante (ce qui justifie que dans le cas général chaque coefficient soit un nombre complexe). Mais il n'y a ici ni équivalence intensionnelle entre les entités finalement décrites par chacune des représentations utilisées (comme quand on donne la position d'un même point dans l'espace en coordonnées cartésiennes et polaires), ni extension conceptuelle comme lorsque s'applique le principe de Hankel. Donc cette cohérence mathématique s'accompagne d'une *incompatibilité sémantique* entre l'aspect *formel* (l'orthogonalité, qui relève d'une description géométrique et vectorielle) et l'aspect *empirique* de la théorie (la possibilité d'obtenir un résultat ou un autre lors de la mesure de la valeur d'une grandeur physique, avec une certaine probabilité). On a dépassé ici le dépassement post-kantien des possibilités de conceptualisation de la notion d'espace où, ainsi que l'écrit Maurice Caveing à propos des géométries non euclidiennes, les idéalités mathématiques ne sont plus « enchaînées aux réalités morphologiques »¹ : on est dans un contexte où une idéalité mathématique donnée exprime les significations d'une *autre* idéalité mathématique. Dans le cas présent, la représentation des possibilités de résultats de mesure par un vecteur d'état dans un espace de Hilbert ne relève donc pas du mode formel, mais du mode symbolique :

Distinction des résultats de mesure → orthogonalité : représentation sur le mode symbolique

Ainsi que l'écrit Michel Paty, par opposition aux théories antérieures où la « forme mathématique des grandeurs était directement imbriquée dans la constitution des relations théoriques qui donnaient le " contenu physique " »² :

L'absence de connexion évidente entre une formalisation mathématique abstraite, qui ne renvoyait pas à des grandeurs physiques directement ou intuitivement concevables, et les données d'expérience sur les phénomènes quantiques, données que cette formalisation permettait cependant de reproduire et de prévoir, suscita la conception de *la théorie quantique comme un formalisme (mathématique) interprété*.³ (souligné par l'auteur)

Ce qui caractérise spécifiquement le formalisme utilisé en mécanique quantique, c'est, ainsi que l'a bien montré Paul Dirac, que son axiomatique lui permet d'établir une relation de correspondance bi-univoque entre des entités mathématiques en rupture avec les

¹ Cf. Maurice Caveing, *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Paris, Vrin, 2004, p. 246-247.

² Michel Paty, *Interprétations et significations en physique quantique*, Revue Internationale de Philosophie, 2000, n°212, pp.199-242, halshs-00170473, p. 7.

³ *Ibid.*

représentations de la physique classique, et les faits physiques eux-mêmes.¹ Selon Bachelard, « notre conceptualisation est une expérience »², et en l'occurrence ici une expérience où l'on ne bénéficie plus de la compatibilité sémantique entre le formalisme de la théorie et celui qui permet au bout du compte de décrire la réalité dans le langage de l'observateur. Mais nous trouvons dans l'efficacité empirique des représentations sur le mode symbolique utilisées en mécanique quantique les conditions *objectives* qui permettent, par application du principe poppérien de transposition, selon lequel « ce qui est vrai en logique est vrai en psychologie »³, de reconnaître la valeur heuristique du formalisme (v. *supra*, section 3.1).

4. Sphère unité et sphère de Bloch

4.1. Passage de la sphère unité à la sphère de Bloch

La sphère unité, initialement en tant que représentation de la position d'un point dans $\mathbf{R}^3$ en coordonnées sphériques, relève évidemment du mode formel, mais cela change si l'on se situe dans le cadre de la correspondance entre cette sphère unité et l'espace des états : le contexte de cette correspondance « métamorphose » la sphère unité en sphère de Bloch. Ce cas exemplifie le célèbre aphorisme de Poincaré sur l'usage de mêmes formulations mathématiques avec des significations distinctes :

La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes (...). Quand le langage a été bien choisi, on est étonné de voir que toutes les démonstrations, faites pour un objet connu, s'appliquent immédiatement à beaucoup d'objets nouveaux.⁴

Et effectivement ici on a des mêmes expressions mathématiques (angles, coordonnées, ...) qui, par la façon que l'on a de comprendre la représentation utilisée, donc *de la représenter elle-même*, vont être mises en jeu dans des domaines différents. Selon René Guitart :

Ce qui fait sens ce n'est pas la représentation particulière, c'est le *mouvement représentatif*, ce qui dépend toujours de la façon dont, par ce mouvement, la représentation se joue d'elle-même, se donne à voir et entendre, se représente.⁵ (souligné par l'auteur)

Dans le cas présent, le « mouvement représentatif » consiste précisément en la façon de passer des significations afférentes à la sphère unité à celles afférentes à la sphère de Bloch, donc en ce qui permet de penser différemment une même représentation géométrique.

4.2. Correspondance entre les deux représentations

D'après (2), pour que l'opérateur $\hat{\mu}_z$ soit une observable, $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ doit constituer une base de l'espace des états. Dans (1) les vecteurs orthogonaux $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ représentent sur le *mode symbolique* dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ les possibilités d'actualisation de résultats de mesure distincts. Par contre la sphère unité est initialement une représentation sur le *mode*

¹ Cf. Paul Dirac, *The principles of quantum mechanics*, fourth edition, 1958, Oxford University Press, p. 15.

² Cf. Gaston Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*, 1934, Paris, Presses Universitaires de France, 1975, p. 48.

³ Cf. Karl Popper, *La connaissance objective*, op. cit., p. 46.

⁴ Henri Poincaré, *La valeur de la science*, Paris, Éditions Ernest Flammarion, 1908, p. 31.

⁵ René Guitart, *Représentation de la représentation*, Conférence le 10 novembre 2007, Colloque de l'AECF Lille, *Les a-tours de la représentation*, <http://rene.guitart.pagesperso-orange.fr/textespreprints/guitartrep08.pdf>, p. 20.

formel, qui n'a de validité mathématique que si les significations géométriques initiales sont préservées. Lorsque l'on associe cette sphère unité avec l'espace des états, les directions correspondant aux vecteurs orthogonaux dans $\mathcal{H}$ étant opposées dans $\mathbf{R}^3$, la correspondance entre les deux représentations reste elle-même symbolique. Ceci exemplifie le fait que lorsque deux représentations sont sous-tendues par des ontologies distinctes, la correspondance entre elles doit être considérée comme relevant du mode symbolique. Donc la distinction entre mode formel et mode symbolique, initialement afférente aux représentations, peut être étendue, lorsqu'elles existent, aux *correspondances* entre représentations.

On peut aussi inverser l'ordre de préséance logique des représentations, voir d'abord dans les projections sur la sphère unité les orientations possibles relatives aux états dans l'espace réel ; puis par des changements de variables (des angles) inverses de ceux précédemment utilisés, trouver dans les composantes d'un vecteur d'état l'expression probabilitaire de leurs modalités (tenant compte de la règle de Born). Dans un ordre ou dans l'autre, le fait d'utiliser ces deux modélisations n'implique pas que l'on renonce à une représentation unifiée du réel¹, mais revient à en exhiber deux aspects distincts et reliés (orientations réelles selon un axe donné et probabilités associées) :

Sphère de Bloch $\leftrightarrow$ Espace des états :

Correspondance sur le mode symbolique entre orientation dans l'espace réel et probabilité

5. La projection stéréographique comme expression des propriétés du vecteur d'état

La transformation purement sémantique de la sphère unité en sphère de Bloch doit permettre d'exprimer la correspondance entre espace des états et sphère de Bloch. Dans ce contexte on peut recourir à une projection stéréographique qui part du pôle sud $S = (0,0,-1)$ de la sphère unité, d'où l'on trace une ligne pour intercepter un point $M' = (x', y', z')$ sur le plan complexe équatorial d'équation $z = 0$, ligne que l'on prolonge ensuite jusqu'au point $M = (x, y, z)$ sur la sphère. Puisque SM est dans le prolongement de SM' , la droite $r(k)$, $k \in \mathbf{R}$, qui va de S à M' est de la forme :

$$r(k) = (0,0,-1) + k(x, y, z+1)$$

On détermine k en regardant l'intersection de la droite $r(k)$ avec le plan équatorial, donc :

$$-1 + k(z+1) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{1+z}; \quad x' = kx = \frac{x}{1+z}; \quad y' = ky = \frac{y}{1+z}; \quad z' = -1 + \frac{z+1}{1+z} = 0$$

Le point (x', y') sur le plan équatorial correspond au nombre complexe :

$$c' = k(x + iy) = x' + iy' = \frac{x + iy}{1+z} \quad (18)$$

Les coordonnées sur la sphère de Bloch sont : $x = \sin \theta \cos \varphi$; $y = \sin \theta \sin \varphi$; $z = \cos \theta$.

¹ Cf. Giorgio Israel, *La mathématisation du réel, Essai sur la modélisation mathématique*, Paris, Éditions du Seuil, 1996, p. 330.

$$c' = \frac{\sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi}{1 + \cos \theta} = \frac{(\sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{1 + \cos \theta} = \frac{(\sin \theta)e^{i\varphi}}{1 + \cos \theta} = \frac{\left(2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}, \text{ donc :}$$

$$c' = \frac{\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi} \quad (19)$$

D'après (11) le vecteur d'état est :

$$|\Psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ avec : } \alpha = \cos \frac{\theta}{2} \text{ et } \beta = \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi} \quad (20)$$

Le vecteur (α, β) est de norme unité (l'astérisque désigne le conjugué complexe) :

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1 \quad (21)$$

Donc la correspondance entre le vecteur d'état et la projection stéréographique peut d'après (11) et (19) s'écrire sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \leftrightarrow c' = \frac{\beta}{\alpha} \quad (22)$$

On peut aussi recourir à une démarche inverse, sans passer par les coordonnées sphériques, en prenant cette fois comme *définitions* :

$$c' := \frac{\beta}{\alpha} \quad (23-a), \quad \text{avec : } \alpha\alpha^* + \beta\beta^* := 1 \quad (23-b)$$

D'après (18) :

$$\frac{SM'}{SM} = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{x' + iy'}{x + iy} = \frac{x' - iy'}{x - iy} = \frac{1}{1 + z} \quad (24), \text{ donc : } c'c'^* = x'^2 + y'^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1 + z)^2}$$

Comme la sphère est de rayon unité : $x^2 + y^2 = (1 + z)(1 - z)$, donc, tenant compte de (23-a) :

$$\frac{c'c'^*}{x^2 + y^2} = \frac{1}{(1 + z)^2} = \frac{c'c'^*}{(1 + z)(1 - z)} \Rightarrow 1 + z = \frac{1}{c'c'^*} - \frac{z}{c'c'^*} \Rightarrow z\left(1 + \frac{1}{c'c'^*}\right) = \frac{1}{c'c'^*} - 1 \Rightarrow z = \frac{1 - c'c'^*}{1 + c'c'^*} = \frac{\alpha\alpha^* - \beta\beta^*}{\alpha\alpha^* + \beta\beta^*}$$

Donc d'après (23-b) : $z = \alpha\alpha^* - \beta\beta^*$ (25)

D'après (18) : $x + iy = c'(1 + z)$; d'après (24) : $\frac{1}{1 + z} = \frac{x' - iy'}{x - iy} = \frac{c'^*}{x - iy} \Rightarrow x - iy = c'^*(1 + z)$

En additionnant, puis en soustrayant, et en divisant par 2 :

$$x = \frac{1}{2}(c' + c'^*)(1+z) ; \quad y = -\frac{i}{2}(c' - c'^*)(1+z)$$

D'après (23-a), (23-b) et (25) :

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^*}{\alpha^*}\right)(\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \alpha\alpha^* - \beta\beta^*) = \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta^*}{\alpha^*}\right)\alpha\alpha^* ; \quad y = -i\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta^*}{\alpha^*}\right)\alpha\alpha^*, \text{ donc :}$$

$$x = \alpha\beta^* + \alpha^*\beta \quad (26) ; \quad y = i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) \quad (27)$$

En reportant les valeurs de α et β données par (20) dans (25), (26) et (27), on retrouve les valeurs de x , y et z en coordonnées sphériques.

Dans le cas de la représentation d'un qubit sur la sphère de Bloch, la projection stéréographique fait donc correspondre au vecteur d'état à *deux* dimensions *un* nombre complexe, quotient des coefficients des composantes du vecteur d'état. Les prédictions physiques ne changent pas lorsqu'on affecte au vecteur d'état un facteur de phase global, ce qui est en accord avec le fait que, d'après (22) ou (23-a), la valeur de c' n'est définie qu'à un même coefficient près pour α et β . On voit que la projection stéréographique, initialement sur le mode formel, et qui relève du mode symbolique lorsque la sphère unité est interprétée en tant que sphère de Bloch, permet par les propriétés d'un nombre complexe de rendre compte des propriétés correspondantes du vecteur d'état.

Conclusion

L'étude de la relation entre espace des états et sphère de Bloch constitue un exemple « canonique » mettant en jeu les représentations en physique, au sens obvie comme représentations du monde, ou comme représentations des théories, tenant compte de la distinction entre le mode formel et le mode symbolique. L'étude de ce cas a également permis de mettre en évidence le fait que cette distinction peut s'appliquer aux correspondances entre représentations.

Copyright © 2025, Frédéric Fabre

<https://www.dblogos.net/er>

Bibliographie

Bachelard, Gaston (1934) *Le nouvel esprit scientifique*, Paris, Presses Universitaires de France, 1975.

Basdevant, Jean-Louis & Dalibard, Jean (2006), *Mécanique quantique*, Paris, Éditions de l'École Polytechnique.

Bitbol, Michel (1996), *Mécanique quantique, Une introduction philosophique*, Paris, Flammarion.

Blanché, Robert (1948), *La science physique et la réalité*, Paris, Presses Universitaires de France.

Borel, Emile (1952), *L'imaginaire et le réel en mathématiques et en physique*, Paris, Éditions Albin Michel.

Brunschvicg, Léon (1912), *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, 1993.

Carnap, Rudolf (1928), *La construction logique du monde*, trad. Thierry Rivain et Élisabeth Schwartz, Paris, Vrin, 2002.

Cartier, Pierre (1998), *Les étapes de la géométrisation de la physique*, E.N.S., Séminaire de Philosophie et Mathématiques, séance du 23 mars 1998.

Caveing, Maurice (2004), *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Paris, Vrin.

Cohen-Tannoudji, Claude ; Diu, Bernard ; Laloë, Franck (1977), *Mécanique quantique I*, Paris, Hermann.

Costa de Beauregard, Olivier (1967), *La grandeur physique « temps »*, in *Logique et connaissance scientifique*, ouvrage collectif sous la direction de Jean Piaget, Paris, Gallimard, Encyclopédie de la Pléiade.

Dirac, Paul (1958), *The principles of quantum mechanics*, fourth edition, Oxford University Press.

Eco, Umberto (1988), *Sémiotique et philosophie du langage*, Paris, Presses Universitaires de France, 2011.

Granger, Gilles Gaston (1979), *Langages et épistémologie*, Paris, Klincksieck.

Guitart, René (2007), *Représentation de la représentation*, Conférence le 10 novembre 2007, Colloque de l'AECF Lille, *Les a-tours de la représentation*, <http://rene.guitart.pagesperso-orange.fr/textespreprints/guitartrep08.pdf>.

Israel, Giorgio (1996), *La mathématisation du réel, Essai sur la modélisation mathématique*, Paris, Éditions du Seuil.

Kant, Emmanuel (1781), *Critique de la raison pure*, trad. A. Tremesaygues et B. Pacaud, Paris, Presses Universitaires de France, 1975.

Kouznetsov, Boris (1971), *Essais sur la relativité*, trad. Anne Sokova, Moscou, Éditions Mir.

Largeault, Jean (1980), *Énigmes et controverses*, Paris, Aubier Montaigne.

Lochak, Georges (1994), *La géométrisation de la physique*, Paris, Flammarion.

Meyerson, Emile (1931), *Du cheminement de la pensée*, tome II, Paris, Librairie Félix Alcan.

Nikseresht, Iraj (2007), *La théorie de la relativité, Une approche historique et philosophique*, Paris, L'Harmattan.

Paty, Michel (2000), *Interprétations et significations en physique quantique*, Revue Internationale de Philosophie, n°212, pp.199-242, halshs-00170473.

Planck, Max (1934), *Initiations à la physique*, trad. J. du Plessis de Grenédan, Paris, Flammarion, 1993.

Poincaré, Henri (1908), *La valeur de la science*, Paris, Éditions Ernest Flammarion.

Popper, Karl (1972), *La connaissance objective*, trad. Jean-Jacques Rosat, Paris, Aubier, 1991.

Popper, Karl (1983), *Le réalisme et la science*, trad. Alain Boyer et Daniel Andler, Paris, Hermann, 1990.

Roux, Sophie (2010), *Meyerson et les mathématiques*, in *Corpus* n° 58, Association pour la revue Corpus, Paris.